SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN IV
NĂM HỌC 2020-2021
MÔN: TOÁN- KHỐI: 11

Thời gian :180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 1 trang, gồm 5 câu)
Ngày thi: 25 tháng 1 năm 2021

Câu 1(4 điểm)

a) Hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy và SA=1. Gọi E và F là trung điểm của AB và BC. Tính góc và khoảng cách giữa SE và AF.

b) Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$

c) Hàm số f(x) có đạo hàm liên tục trên R, f(6)=1 và $\int_0^1 x.f(6x)dx=1$. Tính

$$\int_0^6 x^2 f'(x)dx$$

Câu 2 (1,5 điểm) Giả sử hàm số f liên tục trên R, không là hàm hằng và thỏa mãn $f(xf(y))=y.f(x), \forall x,y\in R$. Chứng minh rằng f đơn ánh và tìm f.

Câu 3(1,5 điểm) Với mỗi số nguyên dương *n,* kí hiệu S_n là số các bộ số nguyên $(a_1,a_2,...,a_n)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

1) $|a_i|\le 1, \forall i=1,2,...,n$

2) $|a_i-a_{i+1}|\le 1, \forall i=1,2,...,n-1$

Tìm giá trị của S_1,S_2 và tìm S_n theo *n.*

Câu 4(2 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu *p* là ước nguyên tố lẻ của n^4+1 (*n* là số tự nhiên) thì *p* chia cho 8 dư 1.

b) Tìm các số nguyên dương *x, y* và số nguyên tố *p* sao cho $xy^3=p(x+y)$

Câu 5(1 điểm) Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định nằm trên (O), điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E và F là chân đường cao kẻ từ B và C. Đường tròn (I) thay đổi đi qua E và F và cắt cạnh BC tại hai điểm M, N. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và P, Q là giao điểm của (I) với đường tròn (HBC). Đường tròn (K) đi qua P, Q và tiếp xúc với (O) tại T (T cùng phía với A đối với đường thẳng PQ). Chứng minh rằng đường phân giác trong của góc MTN luôn đi qua một điểm cố định.

--------------------------Hết--------------------------